Návodné úlohy domáceho kola

58. ročníka MO

kategórie A, B, C

Košice 2008

Zadania a návodné úlohy domáceho kola 58. ročníka matematickej olympiády

Kategória A

<u>A-I-1:</u> V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos(x+y) &+ \sin y &= 1,\\ 2\sin y\cos(y+x) &+ \sin x &= 1. \end{aligned}$$

<u>Návodné úlohy:</u>
1. Dokážte platnosť známych súčtových vzorcov

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

[Prvý vzorec možno dokázať napr. vhodným použitím kosínusovej vety pre trojuholník, ktorého dva vrcholy ležia na jednotkovej kružnici a tretí vrchol je jej stredom. Druhý vzorec sa dá ľahko odvodiť z prvého.]
2. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$1 + \sin\frac{x+\pi}{5}\cdot\sin\frac{x-\pi}{11} = 0.$$

[55–A–S–3]
3. Dokážte, že $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. [Ak $\alpha = 36°$, tak $\sin 2\alpha = \sin 3\alpha$, lebo $2\alpha + 3\alpha = 180°$. Keďže $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ a

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1), \end{aligned}$$

dostávame $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$. Po vydelení nenulovým $\sin\alpha$ máme $4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$. Číslo $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ je jediným kladným riešením kvadratickej rovnice $4t^2 - 2t - 1 = 0$.]

<u>A-I-2:</u> Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD.

<u>Návodné úlohy:</u>
1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k. Dokážte, že obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa priamky AB leží na kružnici k. Majú túto vlastnosť aj tupouhlé trojuholníky? [Stačí vyjadriť veľkosť uhla AVB z trojuholníka AVB, v ktorom zvyšné dva uhly dopočítame z vhodných pravouhlých trojuholníkov. Tento uhol má veľkosť $180° - |\sphericalangle ACB|$, z čoho vyplýva, že štvoruholník $ACBV'$ je tetivový. Obraz priesečníka výšok v osovej súmernosti podľa strany leží na opísanej kružnici aj v prípade, že trojuholník je tupouhlý. Dôkaz sa spraví podobne vypočítaním veľkostí vhodných uhlov.]
2. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, BCV, CAV sú zhodné a porovnajte ich polomer s polomerom kružnice opísanej

trojuholníku ABC. [Všetky tri kružnice sú obrazom kružnice opísanej trojuholníku ABC v osovej súmernosti podľa príslušnej strany. Je to priamym dôsledkom predchádzajúcej návodnej úlohy.]

3. Daný je trojuholník ABC s ortocentrom H. Vyjadrite veľkosť úsečky CH pomocou dĺžok strán a veľkostí uhlov trojuholníka ABC. Snažte sa, aby vaše vyjadrenie bolo čo najjednoduchšie. [Pozri druhé uvedené riešenie súťažnej úlohy. Možných postupov aj vyjadrení je viacero.]

4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k. Dokážte, že obraz bodu V v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky AB leží na kružnici k. Majú túto vlastnosť aj tupouhlé trojuholníky?

5. V rovine sú dané tri navzájom rôzne zhodné kružnice so spoločným bodom H. Druhé priesečníky dvojíc týchto kružníc (rôzne od bodu H) označíme A, B, C. Dokážte, že bod H je priesečníkom výšok trojuholníka ABC.

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s pätami výšok D, E, F ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC. [57–A–II–3]

7. Daný je trojuholník ABC. Dokážte, že os uhla ACB a os strany AB sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

8. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

9. Na kružnici s polomerom r leží 5 rôznych bodov A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholmi sú ortocentrá trojuholníkov ACD, BCD a BCE, je pravouhlý. [C-P-S trojstretnutie 2006/1]

10. Dokážte, že všetky stredy strán a päty výšok v ľubovoľnom trojuholníku ležia na jednej kružnici. (Táto kružnica je známa pod názvom *Feuerbachova kružnica* alebo kružnica deviatich bodov – okrem spomínaných šiestich bodov na nej totiž ešte ležia stredy úsečiek spájajúcich priesečník výšok s jednotlivými vrcholmi trojuholníka.)

11. Nech ABC je trojuholník a P bod v jeho rovine. Označme D, E, F päty kolmíc z bodu P na priamky AB, BC, CA. Dokážte, že ak bod P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, tak body D, E, F ležia na priamke. (Táto priamka sa nazýva *Simsonovou priamkou* bodu P.) Má takúto vlastnosť aj nejaký bod P ležiaci mimo kružnice opísanej trojuholníku ABC?

12. Nech P je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC. Nech X je priesečník Simsonovej priamky bodu P s úsečkou PH. Dokážte, že X je stredom úsečky PH a leží na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC. (Riešenie tejto náročnej úlohy je možné nájsť na stránke `http://mathforum.org/library/drmath/view/61688.html`.)

13. Nech PQ je ľubovoľný priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že Simsonove priamky bodov P a Q sú na seba kolmé a pretínajú sa na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC. (Druhá časť tejto úlohy je naozaj náročná.)

<u>A-I-3:</u> Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.

<u>Návodné úlohy:</u>

1. Dokážte, že ak sú čísla a, b nesúdeliteľné, t. j. . $\mathrm{nsd}(a,b) = 1$, tak aj a) $\mathrm{nsd}(b, a+b) = 1$;

b) $\mathrm{nsd}(b^2, a+b) = 1$. [a) Ak by b a $a+b$ mali deliteľa $d > 1$, ten by delil aj ich rozdiel, ktorý je rovný a, teda d by bol spoločným deliteľom čísel a, b. b) Ak by b^2 a $a+b$ mali spoločného deliteľa $d > 1$, mali by aj spoločného prvočíselného deliteľa p, ktorý by nutne delil aj b, teda b a $a+b$ by mali spoločného deliteľa $p > 1$; ďalej rovnako ako v časti a).]
2. Dokážte, že ak $\mathrm{nsd}(k, l) = 1$ a $k \mid lm$, tak $k \mid m$. [Keďže $k \mid lm$, tak $lm = kt$ pre nejaké celé t. Keďže k, l sú nesúdeliteľné, tak $kx + ly = 1$ pre nejaké celé x, y. Vynásobením číslom m dostaneme $m = kmx + lmy = k(mx + ty)$, teda $k \mid m$.]
3. Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]
Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

<u>A-I-4:</u> Uvažujme nekonečnú aritmetickú postupnosť

$$a, a+d, a+2d, \ldots, \qquad (*)$$

kde a, d sú prirodzené (t. j. . kladné celé) čísla.

- **a) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel pre všetky $k = 2, 3, \ldots$**
- **b) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \ldots$**
- **c) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla, ale obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel.**
- **d) Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Postupnosť $(*)$ buď neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla, alebo obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel.**

<u>Návodné úlohy:</u>
1. Dokážte, že medzi číslami tvaru $8n + 4$ sa nachádza nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.
2. Dokážte, že medzi číslami tvaru $8n + 4$ sa nenachádza žiadna tretia mocnina prirodzeného čísla.
3. Dokážte tvrdenie z časti d) pre prípad $k = 2$, t. j. . dokážte, že postupnosť $(*)$ buď neobsahuje žiadnu druhú mocninu, alebo obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.
4. Dokážte, že ak dve čísla dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok, tak aj ich k-te mocniny dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok. [Ak $d \mid a - b$, tak aj $d \mid (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1}) = a^k - b^k$. Inou možnosťou je tvrdenie dokázať pomocou binomickej vety.]
5. Rozhodnite, či existuje aritmetická postupnosť, ktorá neobsahuje žiadne Fibonacciho číslo (t. j. . číslo, ktoré je členom postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pričom $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pre $n \geq 1$).

<u>A-I-5:</u> V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:

- **a) na 8 kôpok po 251 minciach,**
- **b) na 251 kôpok po 8 minciach.**

Návodné úlohy:

1. Na stole je n pohárov otočených hore dnom. V jednom kroku môžeme otočiť k z nich naopak. Je možné dosiahnuť, aby po konečnom počte krokov boli všetky poháre otočené dole dnom? Vyriešte túto úlohu pre $n = 9$, $k = 2$ a $n = 9$, $k = 5$. Odpovede dôsledne zdôvodnite. [Pre $n = 9$ a $k = 5$ to je možné. Pre $n = 9$ a $k = 2$ nie, pretože sa nemení parita počtu pohárov otočených hore dnom.]

2. V každom vrchole štvorca je jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom postupne premiestniť všetky mince do jedného vrcholu. [Podobne ako v riešení súťažnej úlohy budeme uvažovať zvyšok súčtu čísel priradených minciam po delení štyrmi. Je možné rozdeliť všetky možné pozície do skupín podľa tohto zvyšku, úvodná a cieľová pozícia sú v rôznych skupinách, preto sa z jednej nedá dostať do druhej.]

Vyriešte predchádzajúcu návodnú úlohu s pravidelným osemuholníkom namiesto štvorca.

3. Okolo ohňa sedí $n+1$ psov ($n \geq 1$). Jeden z nich je šéf a má n kostí, ostatní nemajú nič. V jednom kroku zvolíme dvoch psov A a B (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kosť a spolu majú aspoň dve kosti. Zoberieme jednu kosť psovi A a dáme ju jednému zo susedov psa B a zoberieme jednu kosť psovi B a dáme ju jednému zo susedov psa A. Pre ktoré n sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem šéfa má jednu kosť? [KMS 2005/6, 3. zimná séria, úloha 7]

4. Okolo okrúhleho stola sedí n detí. Erika je z nich najstaršia a má n cukríkov. Ostatné deti nemajú žiadne cukríky. Erika sa rozhodla, že cukríky rozdelí a stanovila nasledovné pravidlá. V každom kole zdvihnú ruky všetky deti, ktoré majú pri sebe aspoň dva cukríky. Erika jedného z prihlásených vyberie a ten dá každému svojmu susedovi jeden cukrík. (V prvom kole sa teda prihlási iba Erika a dá svojim susedom po cukríku.) Zistite, pre ktoré $n \geq 3$ môže delenie po konečnom počte kôl skončiť tak, že každé dieťa bude mať práve jeden cukrík. [C-P-S trojstretnutie 2006/2]

5. Čísla $1, 2, \ldots, n$ sú v tomto poradí napísané vo vrcholoch pravidelného n-uholníka. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla nahradiť ich aritmetickým priemerom. Je možné dosiahnuť, aby boli všetky napísané čísla rovnaké? [KMS 2006/7, 2. letná séria, úloha 10]

A-I-6: Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán AC, BC sú dané body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M stred strany AB a P priesečník priamok AD a BE. Dokážte, že obraz bodu P v stredovej súmernosti so stredom M leží na osi uhla ACB.

Návodné úlohy:

1. a) Nájdite množinu bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch daných priamok.

b) S využitím vlastnosti z a) dokážte, že osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

2. Dokážte, že os vnútorného uhla v trojuholníku pretína protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. [Nech K je priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Použijeme sínusovú vetu v trojuholníkoch CKA a CKB, využijeme, že uhly AKC a BKC sú doplnkové a uhly ACK a BCK majú rovnakú veľkosť.

Iné riešenie: pomer $|AK|:|BK|$ je rovnaký, ako pomer obsahov trojuholníkov AKC a BKC, pritom tieto dva trojuholníky majú rovnako dlhé výšky z vrcholu K.]

3. Daný je trojuholník ABC. Nájdite množinu bodov X takých, že trojuholník ABX má rovnaký obsah ako trojuholník ABC. [Dvojica priamok rovnobežných s priamkou AB a rovnako od nej vzdialených.]

4. Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD. Dokážte, že priesečník priamok AC a BD, priesečník priamok AD a BC a stredy základní tohto lichobežníka ležia na priamke. [Uvažujme rovnoľahlosti, ktoré zobrazia úsečku AB na úsečku CD. Tieto rovnoľahlosti sú dve a ich stredmi sú tie dva priesečníky zo zadania úlohy. Obe tieto rovnoľahlosti zachovávajú pomery, preto zobrazia stred úsečky AB na stred úsečky CD. Takže stredy uvažovaných rovnoľahlostí ležia na spojnici stredov základní.]

5. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Stredy jeho strán označíme postupne K, L, M, N.

a) Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník.

b) Aký je pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$?

6. Dokážte, že ťažnice v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode a rozdelia trojuholník na 6 častí s rovnakým obsahom.

7. Dokážte, že ak x, y, z sú dĺžky ťažníc trojuholníka ABC, tak existuje trojuholník s dĺžkami strán rovnými x, y, z. Aký obsah má tento trojuholník, ak obsah trojuholníka ABC je S? [Využite stredovú súmernosť podľa stredu strany BC.]

8. Je daný trojuholník ABC. Vnútri jeho strán BC, CA, AB uvažujme postupne body K, L, M také, že úsečky AK, BL, CM sa pretínajú v bode U. Ak trojuholníky AMU a KCU majú obsah P a trojuholníky MBU a CLU obsah Q, potom $P = Q$. Dokážte. [49–A–S–2]

9. Daný je trojuholník ABC a body K, L, M ležiace postupne vnútri strán BC, CA, AB tak, že priamky AK, BL, CM majú spoločný bod X.

a) Dokážte, že pomer $|AM|:|BM|$ je rovnaký, ako pomer obsahov trojuholníkov ACX a BCX.

b) Dokážte, že

$$\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BK|}{|CK|}\cdot\frac{|CL|}{|AL|}=1.$$

(Toto tvrdenie je časťou *Cevovej vety*. Porovnajte túto vetu s *Menelaovou vetou*. Všimnite si, že často je výhodné vo výpočtoch i dôkazoch previesť pomer vzdialeností na pomer obsahov. Použite tento prístup v druhej návodnej úlohe.)

10. Nech K, L, M sú po rade vnútorné body strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC také, že kružnice vpísané dvojiciam trojuholníkov ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM majú vonkajší dotyk. Potom sa priamky AK, BL, CM pretínajú v jednom bode. Dokážte. [49–A–I–2]

11. Určte všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$ s nasledujúcou vlastnosťou: Vnútri štvoruholníka $ABCD$ existuje bod E taký, že každá priamka, ktorá prechádza týmto bodom a pretína strany AB a CD vo vnútorných bodoch, delí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Svoju odpoveď zdôvodnite. [49–A–II–4]

Kategória B

<u>B-I-1:</u> Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné ôsmimi, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné deviatimi. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné siedmimi. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli.

<u>Návodné úlohy:</u>

1. Skupina zbojníkov ukradla truhlicu plnú zlatých mincí. Lup si chceli spravodlivo rozdeliť. Zakaždým, keď mince chceli rozdeliť na 5, 6, alebo 7 rovnakých kôpok, jedna minca im zvýšila. Koľko mincí bolo v truhlici, ak vieme, že ich nebolo viac ako 300?

2. Skupina zbojníkov ukradla truhlicu plnú zlatých mincí. Lup si chceli spravodlivo rozdeliť. Zakaždým, keď mince chceli rozdeliť na 5, 6, alebo 7 rovnakých kôpok, jedna minca im chýbala. Koľko mincí bolo v truhlici, ak vieme, že ich nebolo viac ako 300?

<u>B-I-2:</u> Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

<u>Návodné úlohy:</u>

1. Určte všetky dvojice reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x - y &= x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 &= x^3 + y^3. \end{aligned}$$

2. Určte všetky dvojice celých čísel, pre ktoré platí

$$x^2 - 1 = 3y^2 + 2xy.$$

<u>B-I-3:</u> Na strane BC, resp. CD rovnobežníka $ABCD$ určte body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD boli rovnobežné a trojuholníky ABE, AEF a AFD mali rovnaké obsahy.

<u>Návodné úlohy:</u>

1. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Zostrojte priamku prechádzajúcu bodom A, ktorá daný obdĺžnik rozdeľuje na dve časti, obsahy ktorých sú v pomere

a) $1 : 2$; b) $3 : 4$; c) $1 : \sqrt{2}$.

2. Je daný rovnostranný trojuholník ABC. Na stranách AC a BC určte body D a E tak, aby úsečky AB a DE boli rovnobežné a aby štvoruholník $DFEC$ a trojuholník ABF mali rovnaké obsahy. (F je priesečník priamok AE a BD.)

<u>B-I-4:</u> Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

Návodné úlohy:

1. Zistite koľko najviac kráľov je možné umiestniť na šachovnici veľkosti 8×8 tak, aby sa najvzájom neohrozovali. (Nádjite optimálne rozmiestnenie a zdôvodnite, že väčší počet nie je možný.)
2. Zistite koľko najviac strelcov je možné umiestniť na šachovnici veľkosti 8×8 tak, aby sa najvzájom neohrozovali. (Nádjite optimálne rozmiestnenie a zdôvodnite, že väčší počet nie je možný.)

B-I-5: Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.

Návodné úlohy:

1. Je daný trojuholník ABC. Nech M je priesečník osi uhla α a kružnice opísanej danému trojuholníku. Dokážte, že $|BM| = |CM|$.
2. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB, pričom $|AB| = 4\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle ACB| = 30°$. Vypočítajte vzdialenosť stredov kružníc vpísanej resp. opísanej danému trojuholníku.

B-I-6: Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n), pre ktoré je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

Návodné úlohy:

1. Zistite pre ktoré prirodzené čísla n je hodnota zlomku $\frac{6}{n-3}$ celým číslom.
2. Zistite pre ktoré prirodzené čísla n je hodnota zlomku $\frac{2n}{n-3}$ celým číslom.
3. Nájdite všetky dvojice celým čísel a, b, pre ktoré platí

$$2ab = 3a + 4b + 7.$$

Kategória C

<u>C-I-1:</u> Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún?

<u>C-I-2:</u> Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC.

<u>Návodné úlohy:</u>

1. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Dokážte, že bod C je stredom úsečky DE.

2. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Dokážte, že trojuholníky ADC a CEB sú podobné.

3. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Označme F pätu kolmice z bodu B na priamku AD. Dokážte, že bod F leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

4. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Označme F pätu kolmice z bodu B na priamku AD. Pre aké veľkosti vnútorného uhla α trojuholníka ABC môže byť trojuholník ASF rovnostranný?

<u>C-I-3:</u> Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi.

<u>Návodné úlohy:</u>

1. Nájdite všetky štvorciferné čísla zložené zo štyroch rôznych nepárnych číslic, ktoré sú deliteľné každou z nich.

2. Nech $\overline{n}$ je číslo, ktoré dostaneme z čísla n otočením poradia čísel. Pre ktoré štvorciferné čísla n je číslo $n + \overline{n}$ deliteľné 11-mi?

3. Nech $\overline{n}$ je číslo, ktoré dostaneme z čísla n otočením poradia čísel. Pre ktoré štvorciferné čísla n je číslo $n - \overline{n}$ deliteľné 11-mi?

<u>C-I-4:</u> Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$. Na polpriamke BC zostrojte taký bod G, aby obsah trojuholníka ABG bol zhodný s obsahom daného päťuholníka.

Návodné úlohy:

1. Je daný trojuholník ABC. Na polpriamke AB zostrojte bod D tak, aby obsah trojuholníka BCD bol rovnaký ako obsah trojuholníka ABC.

2. Je daný trojuholník ABC. Na strednej priečke B_0C_0 zostrojte bod E tak, aby obsah trojuholníka BCE bol rovnaký ako obsah trojuholníka ABC.

C-I-5: Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)

Návodné úlohy:

1. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 52 prirodzenými číslami existuje dvojica, ktorej súčet alebo rozdiel je deliteľný 100.

2. Nech $S = \{3, 7, 11, 15, 19, ..., 95, 99, 103\}$. Koľko prvkov musíme vybrať z množiny S, aby sme mali istotu, že medzi nimi existujú dva také prvky, že ich súčet je najmenej 110?

3. Dokážte, že spomedzi n čísel možno vždy vybrať niekoľko tak, že ich súčet je deliteľný číslom n.

C-I-6: Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Návodné úlohy:

1. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$(a+b)^2 \geq 4ab.$$

Kedy nastáva rovnosť?

2. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$(a+b)^2 < 2(a^2+b^2).$$

3. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Autori: Róbert Hajduk
František Kardoš
Stanislav Krajči
Ján Mazák
Peter Novotný

Vydanie publikácie podporili:

AGENTÚRA
NA PODPORU
VÝSKUMU A VÝVOJA

Agentúra na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu
LPP - 0131 - 06 „Zvyšovanie vedomostného potenciálu“

Úlohová komisia Matematickej olympiády

Názov: Návodné úlohy domáceho kola 58. ročníka MO
Vydavateľ: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
UPJŠ v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Moyzesova 16, 041 54 Košice
Rok vydania: 2008
Rozsah: 16 strán

Kontakt: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
`http://www.strom.sk`
`zdruzenie@strom.sk`